Badanie przebiegu zmienności funkcji.

Przykład

Zbadać przebieg zmienności funkcji określonej wzorem:

$$\mathbf{f(x) = xe^{\frac{1}{x}}}$$

W trakcie badania przebiegu zmienności wyznaczymy następujące parametry:

1. Dziedzina funkcji.
2. Zbiór wartości.
3. Miejsca zerowe, oraz f(0).
4. Granice na krańcach dziedziny.
5. Asymptoty.
6. Postać pierwszej pochodnej
7. Monotoniczność i ekstrema.
8. Postać drugiej pochodnej.
9. Tempo zmian wartości (wypukłość, wklęsłość) oraz punkty przegięcia.

Ad 1.
Ze względu na postać funkcji warunkiem ograniczającym jest:

$$\mathbf{x \neq 0}$$

A zatem $\mathbf{D_f = R \setminus \{0\}}$

Ad 3.

Funkcja ta nie posiada miejsc zerowych. Warunek $\mathbf{xe^{\frac{1}{x}} = 0}$ nie może być spełniony dla żadnego $\mathbf{x \in D_f}$.
Wartość **f(0)** nie istnieje, z uwagi na postać dziedziny funkcji.

Ad 4.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x}} \overset{[-\infty\cdot 1]}{=} -\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} xe^{\frac{1}{x}} \overset{[0\cdot 0]}{=} 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}} \overset{[\infty\cdot 1]}{=} +\infty$$

Ad 5.

Z obliczonych powyżej granic wynika istnienie prawostronnej asymptoty pionowej **x = 0**, oraz brak asymptot poziomych. Próbujemy wyznaczyć ukośne.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

zatem **a = 1**.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - ax\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - ax\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

Zatem dla „obydwu nieskończoności” mamy: **a = 1**   **b = 1**, wobec czego obustronną asymptotą ukośną jest **y = x + 1**.

Ad 6.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \qquad D_{f'} = D_f$$

Ad 7.

Analizujemy pierwszą pochodną.

$$\bigwedge_{x\in D_f} e^{\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x}) = 0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\bigwedge_{x\in D_f} e^{\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x}) > 0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

analogicznie

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$

Wnioski dotyczące monotoniczności i ekstremów ujęte będą w formie tabeli po wykonaniu dalszych obliczeń.

Ad 8.

$f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$ $D_{f''} = D_{f'} = D$

Ad 8.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$$

Ad 7,9.

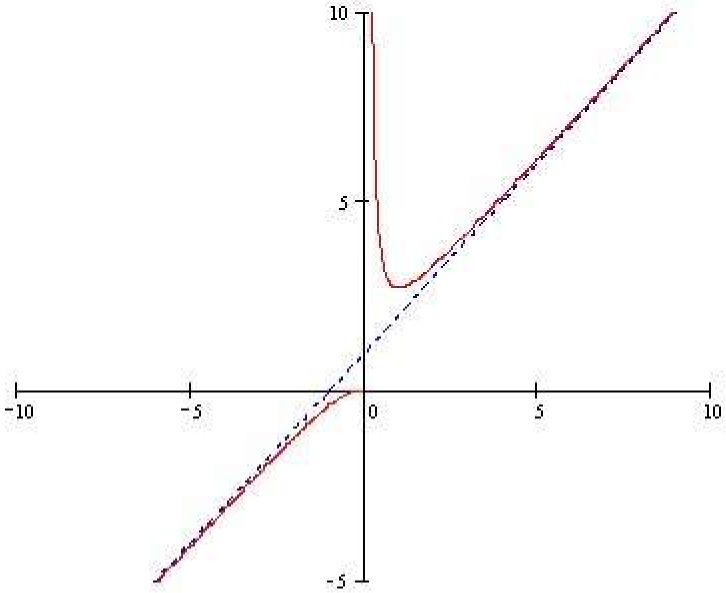
Na podstawie wyliczonych wartości tworzymy tabelkę.

x	(-∞,0)	0	(0,1)	1	(1,+∞)
f'(x)	+	#	-	0	+
f''(x)	-	#	+	+	+
f(x)	-∞ $\nearrow$	1 | +∞	$\searrow$	e min	$\nearrow$ +∞

Z tabelki z łatwością odczytujemy, że:

- funkcja **f(x)** jest rosnąca dla $\mathbf{x} \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$;
- funkcja **f(x)** jest malejąca dla $\mathbf{x} \in (0,1)$;
- funkcja **f(x)** osiąga dla **x=1** minimum lokalne $\mathbf{f_{min}(1)=e}$;
- funkcja **f(x)** jest wypukła dla $\mathbf{x} \in (0,+\infty)$ („maleje wolno”, „rośnie szybko”);
- funkcja **f(x)** jest wklęsła dla $\mathbf{x} \in (-\infty,0)$ („rośnie wolno”);
- funkcja **f(x)** nie posiada punktów przegięcia.

W oparciu o tabelkę możemy już naszkicować wykres.



Ad 2.

Mając wykres, bez trudu ustalamy zbiór wartości:

$$\mathbf{y} \in (-\infty,\mathbf{0}) \cup \langle \mathbf{e},+\infty)$$